ӘОЖ 519.21

СТОХАСТИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМДАРДЫ МАРКОВТЫҢ КЕЗДЕЙСОҚ ПРОЦЕСТЕР СХЕМАСЫ БОЙЫНША МОДЕЛЬДЕУ

Ғылыми жетекші – **Мырзашева А.Н.**
тех.ғ.к., қауымд.профессор
Фазылжанов А.К.
7М01503 – «Математика. Білім беру үдерісін басқару»
білім беру бағдарламасының 2 курс магистранты
aybekfazylzhanov@gmail.com
Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы

Қазіргі заманғы жаратылыстану ғылымдарының барлық дерлік салалары өз кезегінде ықтималдықтар теориясына негізделген статистикалық әдістерді қолданады. Бұл салалар стохастикалық (стохастикалық (грек. στόχος "мақсат, болжам") – кездейсоқтық ұғымын білдіреді) объектілерге немесе құрылымдарға жатады.

Стохастикалық объектілерді сипаттайтын сандық параметрлерді есептеу үшін құбылыстың кездейсоқ факторларын ескеретін қандай да бір ықтималдық моделін құру қажет. Кездейсоқ процесс түрінде дамитын көптеген құбылыстарды математикалық сипаттау үшін ықтималдықтар теориясына негізделген Марков кездейсоқ процестері деп аталатын математикалық аппаратты тиімді қолдануға болады.

Айталық, уақыт өте келе күйі немесе жағдайы өзгеретін қандай да бір стохастикалық құрылым S жүйесі болсын (S жүйесі ретінде техникалық құрылғы, жөндеу шеберханасы, есептеу машинасы, қаржы жүйесі, басқару жүйесі, эпидемия таралуы, көбею, жойылу процестері және т.б. болуы мүмкін). Егер S жүйесінің күйі уақыт бойынша кездейсоқ өзгерсе, онда S жүйесінде кездейсоқ процесс жүреді деп айтылады. Мысал ретінде компьютердің жұмыс істеу процесі (компьютерге тапсырыстардың түсуі, осы тапсырыстардың түрі, компьютердің кездейсоқ істен шығуы), басқарылатын зымыранды нысанаға алу процесі (зымыранды басқару жүйесіндегі кездейсоқ бұзылулар (кедергілер)), шаштаразда немесе жөндеу шеберханасында, төлем кассаларында клиенттерге қызмет көрсету процесі (клиенттерден түскен өтінімдер (талаптар) ағынының кездейсоқ сипаты) т.б. құбылыстарды алуға болады.

Егер t уақытының әрбір t_0 нүктесі үшін болашақта ($t > t_0$ болғанда) жүйенің кез келген күйінің ықтималдығы тек оның қазіргі ($t = t_0$ кезіндегі) күйіне байланысты және жүйенің бұл күйге қашан және қалай келгеніне байланысты емес (яғни, процесс бұрын қалай дамыды) болса, онда кездейсоқ процесс Марковтық процес (немесе "соңғы әсері жоқ процесс") деп аталады.

S тозу дәрежесімен сипатталатын техникалық құрылғы болсын. Оның әрі қарай қалай жұмыс істейтіні қарастырайық. Бірінші жуықтауда жүйенің болашақта жұмыс істеу сипаттамалары (істен шығу жиілігі, жөндеу қажеттілігі) құрылғының қазіргі күйіне байланысты және құрылғының қазіргі күйіне қашан және қалай жеткеніне байланысты емес.

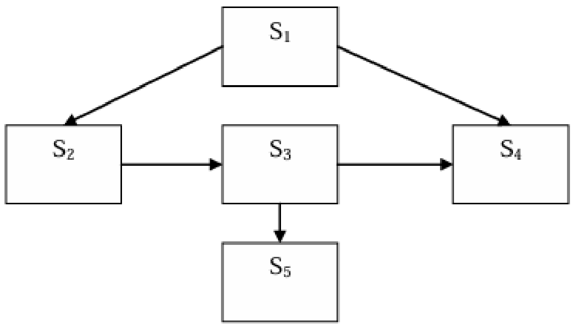
Марковтың кездейсоқ процестер теориясы – қолданылу жағдайлары ауқымды болып келетін ықтималдықтар теориясының кең тараған бөлімі, көптеген қолданылуы бар (домна пешінде балқыту кезіндегі диффузия немесе шихта араластыру түріндегі физикалық құбылыстар, кезекке тұру процестері т.б.).

Марков процестерінің классификациясы.

Марковтың кездейсоқ процестерін 2 топқа бөлуге болады. бөлінеді. Бірінші классификациялық белгісі - жағдай спектрінің сипатына байланысты. Егер S жүйесінің $S_1, S_2, S_3, \ldots$ мүмкін жағдайларын тізімдеуге болатын болса және процестің өзі анда-санда бір жағдайдан екінші жағдайға (бірден) ауысып отыратын S жүйесінен тұратын болса, онда кездейсоқ процесс (КП) дискретті жағдайлар процесі деп аталады.

Мысал. Техникалық құрылғы I және II екі түйіннен тұрады, олардың әрқайсысы істен шығуы мүмкін. Жағдайлар: S_1-екі түйін де жұмыс істейді; S_2 - бірінші түйін істен шықты, екінші жұмыс жасап тұр; S_3 – екінші түйін істен шықты, бірінші жұмыс жасап тұр; S_4-екі түйін де істен шыққан.

Үздіксіз күйлері бар процестер бар (күйден күйге біркелкі ауысу), мысалы, жарық желісіндегі кернеудің өзгеруі. Біз тек дискретті күйлері бар кездейсоқ процестерін қарастырамыз. Бұл жағдайда жүйенің мүмкін күйлері түйіндермен, ал мүмкін өтулер доғалармен белгіленетін күйлер графтарын қолдану ыңғайлы (1-сурет).



Сурет 1 – Жүйе жағдайларының графы

Екінші классификациялық белгісі - уақыт бойынша жұмыс істеу сипаты. Егер жүйенің күйден күйге ауысуы уақыттың қатаң анықталған, алдын-ала белгіленген $t_1, t_2, t_3, \ldots$ сәттерінде ғана мүмкін болса, онда кездейсоқ процесс дискретті уақыт процесі деп аталады,. Егер жүйенің күйден күйге ауысуы кез-келген алдын-ала белгісіз кездейсоқ сәтте мүмкін болса, онда кездейсоқ процесс үздіксіз уақытпен байланысты болады..

Дискретті уақытқа байланысты марков тізбегін есептеу.

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ дискретті жағдайлары және $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ дискретті уақыты берілген экономикалық S жүйесі болсын (қадамдар, процестің кезеңдері, кездейсоқ процессті (қадам нөмірінің) аргументінің функциясы ретінде қарастыруға болады). Жалпы жағдайда, кездейсоқ процесте $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ сәттерінде $S_1 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to S_4 \to S_1 \ldots$ ауысулары орын алады.

Біз k-қадамдардан кейін жүйе S_i күйінде болатын оқиғаны $S_i^{(k)}$ деп белгілейміз. Кез келген k мәнінде оқиғалар $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}$ толық топты құрайды және үйлесімсіз оқиғалар болады. Жүйеде болып жатқан кездейсоқ процесті $S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{3}, S_3^{(4)}, \ldots$ оқиғалар тізбегі ретінде қарастыруға болады.

Мұндай кездейсоқ оқиғалар тізбегі Марков тізбегі деп аталады. Марков тізбегін күйлердің ықтималдығы арқылы сипаттаймыз. k - қадамдардан кейін жүйенің S_i күйінде болу ықтималдығы $p_i(k)$ болсын және

$$p_1(k) + p_2(k) + \cdots + p_n(k) = 1,$$

болатыны белгілі. Кез келген k мәні үшін жүйенің жағдайларының ықтималдығын табу керек болсын.

Кез-келген қадам үшін ($t_1, t_2, \dots, t_k$ уақыт моменттерінде) жүйенің кез-келген күйден кез-келген басқа күйге ауысу ықтималдығы бар (егер бір қадамда тікелей ауысу мүмкін болмаса, олардың кейбіреулері нөлге тең), сондай-ақ жүйенің бір күйде кешігу ықтималдығы да болады. Олар кездейсоқ шаманың өтпелі ықтималдығы деп аталады.

Анықтама. t_k уақыт мезетінде S жүйесінің S_i жағдайдан S_j жағдайға тікелей өту ықтималдығы k кезең үшін i жағдайдан j жағдайға өтетін өтпелі ықтималдығы деп аталады да, P_{ij} деп белгіленеді.

Анықтама. Егер $i = j$ болса, онда өтпелі ықтималдық $P_{ij}(k) = P_{ii}(k)$ болады, бұл ықтималдық S жүйесінің S_i жағдайда кідіріс ықтималдығы деп аталады.

Егер kкезеңде S_i жағдайдан келесі S_j $(i \neq j)$ жағдайға тікелей өту мүмкін болмаса немесе i жағдайда кідіріс $(i = j)$ мүмкін болмаса, онда $P_{ij}(k) = 0$ болады.

Егер өтпелі ықтималдықтар k кезеңге байланысты болмаса, онда марковтық тізбек біртекті деп аталады.

Бұл кезде $P_{ij}(k)$ өтпелі ықтималдығы P_{ij} түрінде ғана белгіленеді.

$S_1, S_2, \dots, S_n$ жағдайлардан тұратын S жүйесі берілсін, $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

P_{ij} арқылы өтпелі ықтималдықтарды матрицасы белгілі болсын.

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12}\dots & P_{1j}\dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22}\dots & P_{2j}\dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{nj} & P_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Жоғарыда келтірілген $S_i^{(k)}, S_i^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$ оқиғаларды пайдалана отырып, өтпелі ықтималдықтарды $P_{ij} = P(S_j^{(k)}/S_i^{(k-1)})$ шартты ықтималдықтар ретінде жазуға болады.

Матрицаның әр жолындағы элементтердің қосындысы 1-ге тең болуы керек. Өтпелі ықтималдық матрицасының орнына белгіленген жағдай графы жиі қолданылады (доғаларда нөлдік емес ауысу ықтималдығын білдіреді, кідіріс ықтималдығы талап етілмейді, өйткені оларды оңай есептеуге болады, мысал ретінде P_{11} ықтималдығы былай табылады $P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13})$.

Белгіленген жағдай графы (немесе өтпелі ықтималдық матрицасы) бар және жүйенің бастапқы жағдайын біле отырып, $\forall k$ үшін $p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)$ күйлерінің ықтималдығын табуға болады.

Теорема. Біртекті марковтық тізбек үшін k-дан $k + 1$ кезеңге дейінгі жағдай ықтималдықтарының жол-векторы (жол матрицасы) $(k - 1)$-ден k кезеңге дейінгі жағдай ықтималдықтарының жол-векторы матрицасы мен өтпелі ықтималдықтар матрицасының көбейтіндісіне тең болады:

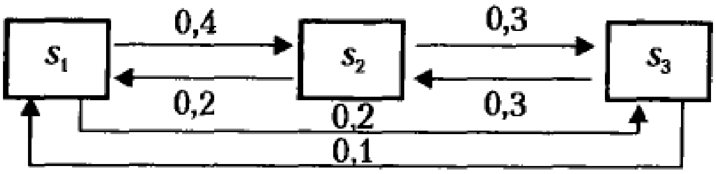
$$(p_1(k) \quad p_2(k) \quad \dots \quad p_n(k)) = (p_1(k-1) \quad p_2(k-1) \quad \dots \quad p_n(k-1)) \cdot P, \qquad (1)$$

мұндағы $(p_1(k) \ p_2(k) \ \dots \ p_n(k))$ - жағдай ықтималдықтарының жол-векторы немесе жол матрицасы; $(p_1(k-1) \ p_2(k-1) \ \dots \ p_n(k-1))$ - $(k-1)$-ден k кезеңге дейінгі жағдай ықтималдықтарының жол-векторы; P - өтпелі ықтималдықтар матрицасы.

Теореманы дәлелдеу $P_{ij} = P(S_j^{(k)}/S_i^{(k-1)})$ шартты ықтималдықтар мен толық ықтималдық формуласы көмегімен жүргізіледі. Берілген мәліметтерді пайдаланып, шығарылатын төмендегі тапсырманы мысал ретінде келтіруге болады.

Мысал 1. 2%, 3%, 4% пайыздық мөлшерлемелердің бірін сипаттайтын банк жағдайын қарастырайық. Бұл пайыздық мөлшерлемелер әр тоқсанның (кварталдың) басында қойылады да, тоқсан бойына сақталынады. Сонымен, S жүйесі ретінде қарастырылып отырған банк жүйесі алынса, онда жүйе әрбір уақыт мезетінде үш жағдайдың тек біреуінде ғана бола алады: s_1 - 2% пайыздық мөлшерлеме, s_2- 3% пайыздық мөлшерлеме, s_3 - 4% пайыздық мөлшерлеме. Алдыңғы жылдардағы банк жұмысын талдау нәтижесі уақыт өтуіне байланысты өтпелі ықтималдықтардың өзгерісінің елемеуге болатындай, аз шамада екендігі анықталған.

Өткен жылдың аяғында банктің пайыздық мөлшерлемесі 3%-ды құраған болса және таңбаланған жағдай графы 2 суретте келтірілгендей болса, осы мәліметтер бойынша жыл аяғындағы банктің көрсетілген жағдай ықтималдықтарын анықтау керек болсын.



Сурет 2 – мысалға сәйкесті жүйенің таңбалаланған жағдай графы

Шешуі. S жүйесі үш жағдайда бола алады, жүйеде жүретін жағдайлар жиыны үш элементтен тұрады, ендеше S жүйесінде жүретін кездейсоқ процесс дискретті процесс болады.

Белгілі бір анықталған дәрежедегі аз шамадағы ауытқушылықпен банктің болашақта өзінің осы жағдайларының бірінде болуы оның нақ осы кезде қандай жағдайда болғанына тәуелді және оның өткен кезде, яғни осының алдында қандай жағдайда болғанына тәуелді емес деп уйғаруға болады. Сол себептен де қарастырылып отырған процесті марковтық процесс деп есептеуге болады.

Алынған мысалдың шартына сәйкес банк жағдайдан жағдайға алдын ала анықталған уақыт мезетінде ғана өте алады: t_k - k -шы тоқсанның басы, $k = 1, 2, 3, 4$. Ендеше, S жүйесінде жүретін кездейсоқ процесс дискретті уақыт бойынша жүретін процесс болып табылады.

Өтпелі ықтималдықтардың уақытқа тәуелділігін есепке алмауға (елемеуге) болатындықтан, қарастырылып отырған процесс біртекті болады.

Олай болса, S жүйесінде біртекті марковтық дискретті уақытқа байланысты (тәуелді) дискретті кездейсоқ процесс жүреді, яғни біртекті марковтық тізбек болады.

2 суреттегі таңбаланған граф бойынша p_{ij} өтпелі ықтималдықтардың мәндерін жазамыз: $p_{12} = 0{,}4; \quad p_{13} = 0{,}2.$ Онда, $i = 1$ болғанда оқиғалардың толық топт құрайтын үйлесімсіз оқиғалар болғандықтан, ықтималдық қасиеті бойынша

$$p_{11} = 1 - (p_{12} + p_{13}) = 1 - (0{,}4 + 0{,}2) = 0{,}4$$

болады. Сол сияқты,

$p_{21} = 0{,}2$; $p_{23} = 0{,}3$, бұдан $p_{22} = 1 - (p_{21} + p_{23}) = 1 - (0{,}2 + 0{,}3) = 0{,}5$.

$p_{31} = 0{,}1$; $p_{32} = 0{,}3$, онда $p_{33} = 1 - (p_{31} + p_{32}) = 1 - (0{,}1 + 0{,}3) = 0{,}6$.

Табылған мәндерге сәйкес өтпелі ықтималдықтар матрицасын құрылады:

$$P = (0{,}4\ 0{,}4\ 0{,}2\ 0{,}2\ 0{,}5\ 0{,}3\ 0{,}1\ 0{,}3\ 0{,}6\ ).$$

Матрицаның әрбір жатық жолындағы элементтердің қосындысы 1-ге тең (солай болуы керек).

Алдыңғы жолдың аяғында банктің пайыздық мөлшерлемесі 3% болғандықтан, $t = 0$ бастапқы уақыт мезетінде S жүйесі s_2 жағдайда болды деп есептеуге болады. Сондықтан, ықтималдықтың бастапқы таралуы векторы мынадай болады:

p10   p20   p30=0 1 0 .   (2)

Төрт тоқсан өткеннен кейінгі жылдың аяғындағы банктің жағдай ықтималдығын n=3 және k=4 мәндері үшін (1) формуласы бойынша табуға болады. Осы жағдай үшін бұл формула былай жазылады:

p14   p24   p34=p10   p20   p30.P4.   (3)

Алдымен P^4 матрицасын есептеп алу керек.

P2=0,4 0,4 0,2 0,2 0,5 0,3 0,1 0,3 0,6 .0,4 0,4 0,2 0,2 0,5 0,3 0,1 0,3 0,6 =0,26 0,42 0,32 0,21 0,42 0,37 0,16 0,37 0,47 .

P4=P2∙P20,26 0,42 0,32 0,21 0,42 0,37 0,16 0,37 0,47 ∙0,26 0,42 0,32 0,21 0,42 0,37 0,16 0,37 0,47 =0,2070 0,4040 0,3890 0,2020 0,4015 0,3965 0,1945 0,3965 0,4090 .

Осы P^4матрицасының және (2) мәндерін осы мысал үшін жазылған (3) формуласына қойып, есептеулер жүргізу керек, сонда

p14   p24   p34=0 1 0 ∙P4=

=0 1 0 ∙0,2070 0,4040 0,3890 0,2020 0,4015 0,3965 0,1945 0,3965 0,4090 =

=0,2020 0,4015 0,3965 .

Сонымен, p14=0,2020; p24=0,4015; p34=0,3965, яғни жылдың соңында 2%, 3%, 4% пайыздық мөлшерлемелердің ықтималдығы сәйкесінше 0,2020; 0,4015; 0,3965 болады екен. Нақтырақ айтқанда, жылдың аяғында өткен жылдың аяғындағыдай 3% пайыздық мөлшерлеменің болуы басқа пайыздық мөлшерлемелерге қарағанда ықтималды болады.

Ғылым, білімнің әр саласында кездесіп отыратын осындай практикалық мақсаттағы есептерді шығару барысында кездейсоқ процестер теориясының элементтерінің қолданбалы әдістерін белсенді түрде пайдалана білу әр білім алушы мен маманның функционалдық сауаттылығы мен математикалық мәдениетінің қалыптасуына игі ықпал ететіні анық.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - Девятое издание, стеротипное. - М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
2. Мырзашева А.Н. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика есептері. - АГУ баспасы, 2021. - 102 б.
3. Исследование операции в экономике: Учеб.пособие для вузов / под редакцией проф. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 408 с.
4. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем.- М.: Финансы и статистика, 2006.-432 с.